Grado en Matemáticas

Examen de Análisis Funcional

1. (1,5 puntos) Sea $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios (de una variable real con coeficientes reales) con la norma
$$\|p\| = \sup\{|p(t)| \, : \, -1 \leqslant t \leqslant 1\}$$
Estudia la continuidad de las aplicaciones lineales $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ y $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, definidas respectivamente por $f(p) = p(2)$ y $T(p) = p'$ para todo $p \in \mathcal{P}$.

2. (2 puntos) Prueba que
$$M = \left\{ f \in L_2[0,4] : \int_0^4 f(x)\, \mathrm{d}x \, = 0 \right\}$$
es un subespacio cerrado de $L_2[0,4]$. Calcula el punto más próximo en M a la función característica del intervalo $[0,1]$.

3. (2 puntos) Sea $Y = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0, x(2) + x(3) = 0, x(3) + x(4) = 0\}$. Calcula la proyección ortogonal de ℓ_2 sobre $Y^{\perp}$.

4. (0,5 puntos cada una) Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas, indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba, y, cuando sean falsas, indica un contraejemplo.

   a) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X en Y cuyo núcleo sea cerrado es continuo.

   b) Todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

   c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un funcional lineal continuo de X en ℓ_∞.

5. (3 puntos) Responde a uno de los dos siguientes temas.

   a) Formas geométricas del teorema de Hahn-Banach. Separación de conjuntos convexos.

   b) Teorema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus. Alguna aplicación.

   c) Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

Granada, 20 de diciembre de 2018